МАТЕМАТИЧКИ ВЕСНИК
46 (1994), 33–39

UDC 517.955
оригинални научни рад
article de recherche

L'ÉQUATION NON-HOMOGÈNE DE VÉCUA

Miloje Rajović, Rade Stojiljković, Dragan Dimitrovski

Abstrait. Le mèthode de Lagrange de la variation des constantes au cas des équations aréolaires avec une conjugaison de la fonction inconnue $\bar{w}$, où appartient l'équation bien connue de I. N. Vecua [1], n'étant pas valable, on la remplace dans cet article par un mèthode des itérations qui est plus immédiat et plus abordable aux traitements numériques.

On connait, [1], page 156, que l'équation de Vécua

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = Aw + B\bar{w}, \tag{1}$$

$w = w(z, \bar{z}) = u(x, y) + iv(x, y)$ étant une fonction complèxe de deux variables $z = x + iy$, $\bar{z} = z - iy$, différentiable dans une region fermée et finie G du plan des complèxes, Γ étant la frontière de G, et avec les coèfficients étant les fonctions mésurables dans l'espace:

$$A(z, \bar{z}), \quad B(z, \bar{z}) \in L_p(G), \quad p > 2,$$

possède une représentation de la solution

$$w(z, \bar{z}) = \Phi(z)e^{\omega(z)}, \tag{2}$$

où Φ est une fonction analytique seulement par rapport à z (c'est à dire au sense des équations de Cauchy-Riemman), en qualité d'une "constante" arbitraire de l'intégration, $\omega(z)$ étant une fonction entière, bornée dans G et donnée par une intégrale Denjoi-Théodorescu

$$\omega(z) = \frac{1}{\pi} \iint_G \left(A(\zeta) + B(\zeta) \frac{\bar{w}(\zeta)}{w(\zeta)} \right) \frac{d\xi \, d\eta}{\zeta - z} \quad (\zeta = \xi + i\eta). \tag{3}$$

La formule (2) ne présente pas la solution de l'équation (1), mais seulement une forme favorable pour une appréciation qualitative de la solution.

Tout cella dit ci-dessus ayant lieu au cas spécial si $A(z, \bar{z})$ et $B(z, \bar{z})$ sont les fonctions analytiques par chacune des variables indépendentes z et $\bar{z}$ dans une région fermée et finie G, car dans l'absence des singularités de A et B dans l'interieur de G, l'intégrale double

$$\left(\iint_G |A(z,\bar{z})|^p\,dx\,dy\right)^{1/p}$$

toujours existe.

Dans son thèse du doctorat B. Ilievski [2], et dans l'article [3], sont résolues quelques équations spéciales (1) aux coèfficients analytiques (par rapport à z), au moyen des séries aréolaires.

Dans son thèse de la maitrise des sciences matheématiques, R. Stojiljković résout au moyen des séries aréolares l'équation (1) avec les coèfficients généraux analytiques $A(z,\bar{z})$ et $B(z,\bar{z})$, et il obtient pout la représentation (2) une formule explicite pour la solution de l'équation de Vécua dans la forme d'une série des coèfficients avec une disposition symmètrique des élément A, B et l'élément de l'intégration $\Phi(z)$:

$$\begin{aligned} w(z,\bar{z}) &= \Phi + \left\{\int A\Phi\,d\bar{z} + \int B\bar{\Phi}\,dz\right\} \\ &+ \left\{\int A\,d\bar{z}\int A\Phi\,d\bar{z} + \int A\,d\bar{z}\int B\bar{\Phi}\,d\bar{z}\int B\,d\bar{z}\int \bar{A}\bar{\Phi}\,dz + \int B\,d\bar{z}\int \bar{B}\bar{\Phi}\,d\bar{z}\right\} \\ &\qquad + \left\{\int A\,d\bar{z}\int A\,d\bar{z}\int A\Phi\,d\bar{z} + \int A\,d\bar{z}\int A\,dz\int B\bar{\Phi}\,d\bar{z}\right. \\ &\qquad\quad \left. + \int B\,d\bar{z}\int \bar{B}\,dz\int \bar{A}\bar{\Phi}\,d\bar{z} + \int B\,d\bar{z}\int \bar{B}\,dz\int \bar{B}\Phi\,dz\right\} + \cdots \end{aligned} \tag{4}$$

ainsi que les membres sur la k-tième place soient groupés dans une somme de 2^k, k-multiples intégrales des combinaisons et groupements ci-dessus des éléments A, B, et des leurs conjuigaisons.

On va appliquer maintenant à l'équation de Vécua [1] l'idée classique de Lagrange des variations des constantes. Soit dans la représentation (2) $\Phi(z)$, au lieu d'être une "constante" d'intégration arbitraire, puisse être une fonction de deux variables z, $\bar{z}$, que l'on doit déterminer pour qu'elle soit la solution, avec (6), d'une équation non-homogène de Vécua

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = Aw + B\bar{w} + F, \tag{5}$$

$F(z,\bar{z})$ étant aussi une fonctions analytique. On va supposer donc que la fonction

$$w = \Phi(z,\bar{z})e^{\omega(z)}, \tag{6}$$

$\omega(z)$ étante donnée par (3), c'est à dire liée avec une équation homogène correspondante de I. N. Vécua (1).

A partir de la dérivation de (6),

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial \bar z} &= \frac{\partial \Phi}{\partial \bar z} e^{\omega(z)} + \Phi e^{\omega(z)} \cdot \frac{\partial w}{\partial \bar z} \\ &= \frac{\partial \Phi}{\partial \bar z} e^{\omega(z)} + \Phi e^{\omega(z)} \left[A(z,\bar z) + B(z,\bar z)\frac{\bar w}{w}\right] \\ &= \frac{\partial \Phi}{\partial \bar z} e^{\omega(z)} + w\left[A + B\frac{\bar w}{w}\right] = \frac{\partial \Phi}{\partial \bar z} e^{\omega(z)} + Aw + B\bar w,\end{aligned}$$

en remplaçant dans (5) on obtient

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \bar z} e^{\omega(z)} + Aw + B\bar w = Aw + B\bar w + F,$$

d'où

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \bar z} = F(z,\bar z) e^{-\omega(z)},$$

c'est à dire

$$\Phi(z,\bar z) =$$
$$= \Psi(z) - \frac{1}{\pi}\iint_G \left[\frac{F(\zeta,\bar\zeta)}{\zeta - z}\exp\left\{-\frac{1}{\pi}\iint_G \left[A(u,\bar u) + B(u,\bar u)\frac{\bar w(u)}{w(u)}\right]\frac{d\tau\, d\sigma}{u-\xi}\right\}\right] d\xi\, d\eta, \tag{7}$$

Ψ étant une fonctions analytique à l'égard à z en qualité d'une "constante" de l'intégration, $\zeta = \xi + i\eta \in G$, $u = \tau + i\sigma \in G$, $z = x + iy \in \operatorname{int} G$.

Ainsi de cette façon avec (6) et (7) est donnée une représentation de la solution d'une équation non-homogène de Vécua, en dépendence de toutes les trois coéfficients $A(z,\bar z)$, $B(z,\bar z)$, $F(z,\bar z)$ analytiques, qui se distingue de la solution proposée dans le livre de Vécua [1], p. 168, formule (5.4):

$$w(z) = \frac{1}{\pi}\iint_G \frac{A(\zeta)w(\zeta) + B(\zeta)\bar w(\zeta)}{\zeta - z}\, d\xi\, d\eta + \frac{1}{\pi}\iint_G \frac{F(\zeta)\, d\xi\, d\eta}{\zeta - z} + \Psi(z), \tag{8}$$

d'une appréciation plus facile de l'exponentiel $e^{\omega(z)}$, à cause de la restrictivité du module du quotient $\bar w / w$.

Cépendant, notre formule (7), aussi que la formule de Vécua (8), ne sont pas les solutions explicites, mais seulement les formules représentatives. Que le methode classique de la variation des constantes au sens de Lagrange ici n'aura pas du succès, on le voit de notre solution explicite (4), où la "constante" de l'intégration $\Phi(z)$ n'est pas isolée, ainsi que la variation devienne impossible, c'est à dire on aura une variation de la série des constantes, pas une seule, ce qui arrivera jusqú à une équation intègrale ou à une équation différentielle d'ordre infinie.

On peut conclure que la variation des constantes au cas des équations de Vécua avec une conjuigaison de la fonction inconnue $\bar w$, n'est pas possible au sens classique.

C'est pourquoi dans cet article nous donnerons un mèthode de la solution du problème non-homogène de I. N. Vécua au cas des coèfficients analytiques, au moyen des séries aréolaires. Soit valable dans l'équation (5)

$$A(z,\bar z)=\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty}a_{ij}z^i\bar z^j,\quad B(z,\bar z)=\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty}b_{ij}z^i\bar z^j,\quad F(z,\bar z)=\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty}f_{ij}z^i\bar z^j. \tag{9}$$

Alors, suivant le théorème de Cauchy [4], (5) possède une solution analytique

$$w=w(z,\bar z)=\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty}c_{ij}z^i\bar z^j. \tag{10}$$

Par un remplacement de (9) et (10) dans (8), apres un calcul prolongé, on obtient le théorème suivant:

THÉORÈM I. *La solution générale de l'équation non-homogène (5) de V'ecua est donnée par l'expression*

$$w=w_{A,\Phi}+w_{B,\Phi}+w_{A,B,\Phi}+w_{A,B,F}, \tag{11}$$

ou $w_{A,\Phi}$ présente cette partie de la solution qui dépend du coèfficient A et d'élément arbitraire de l'intégration Φ, $w_{B,\Phi}$ la partie de la solution dépendente de B et Φ, $w_{A,B,\Phi}$ est une influence commune de tous les deuz coéfficients A et B, tandis que $w_{A,B,F}$ contient l'influence de la non-homogénéité F en collaboration avec A, B, ainsi que cettes influences sont données par les séries convergentes symètriques suivantes:

$$w_A=\Phi(z)+\int A\Phi\,d\bar z+\int A\,d\bar z\int A\Phi\,d\bar z+\int A\,d\bar z\int A\,d\bar z\int A\Phi\,d\bar z+\cdots \tag{12}$$

$$w_B=\int B\bar\Phi\,d\bar z+\int B\,d\bar z\int\bar B\bar\Phi\,dz+\int B\,d\bar z\int\bar B\,dz\int\bar B\Phi\,dz+\cdots \tag{13}$$

$$\begin{aligned} w_{A,B}=&\int A\,d\bar z\int B\bar\Phi\,d\bar z+\int B\,d\bar z\int\bar A\bar\Phi\,dz\\ &+\int A\,d\bar z\int A\,dz\int B\bar\Phi\,dz+\int A\,d\bar z\int B\,d\bar z\int\bar A\bar\Phi\,dz\\ &+\int A\,d\bar z\int B\,d\bar z\int\bar B\Phi\,dz+\int B\,d\bar z\int\bar A\,dz\int\bar A\bar\Phi\,dz\\ &+\int B\,d\bar z\int\bar A\,d\bar z\int\bar B\Phi\,dz+\int B\,d\bar z\int\bar B\,dz\int\bar A\bar\Phi\,d\bar z\\ &+\cdots \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} G=w_{A,B,F}=&\int F d\bar z+\int A\,d\bar z\int F\,dz+\int B\,d\bar z\int\bar F\,dz\\ &+\int A\,d\bar z\int A\,d\bar z\int F\,d\bar z+\int A\,d\bar z\int B\,d\bar z\int\bar F\,dz\\ &+\int B\,d\bar z\int\bar A\,dz\int\bar F\,dz+\int B\,d\bar z\int\bar B\,dz\int\bar F\,dz \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\int A\,d\bar z\int A\,d\bar z\int A\,d\bar z\int F\,d\bar z+\int A\,d\bar z\int A\,d\bar z\int B\,d\bar z\int \bar F\,dz\\
&+\int A\,d\bar z\int B\,d\bar z\int \bar A\,dz\int \bar F\,dz+\int A\,d\bar z\int B\,d\bar z\int \bar B\,dz\int F\,d\bar z\\
&+\int B\,d\bar z\int \bar A\,dz\int \bar A\,dz\int \bar F\,dz+\int B\,d\bar z\int \bar A\,dz\int \bar B\,dz\int F\,d\bar z\\
&+\int B\,d\bar z\int \bar B\,dz\int \bar A\,dz\int \bar F\,dz+\int B\,d\bar z\int \bar B\,dz\int B\,d\bar z\int F\,d\bar z\\
&+\cdots
\end{aligned}
\tag{15}
$$

où (15) ne dépend pas de l'élement d'intégration $\Phi(z)$.

Plus éxactement dit, le preuve peut être commencé par les séries (9), ensuite par l'induction on construit les formules (12), (13), (14) et (15), qu'on peut ensuite vérifier d'une démonstration immédiate.

Une autre démonstration peut être faite du mèthode d'un remplacement analytique avec les itérations immédiatement de (5).

Ayant le théorème I ainsi formulé, et les solutions explicites, il est facile de formuler les théorèmes suivants, analogues avec les semblables chez les équations différentielles ordinaires:

Théorème II. *La solution générale de l'équation non-homogéne (5) est dans la forme d'une somme de la solution générale de l'équation correspondente homogène (1), avec un intégrale particulière de l'équation non-homogène, c'est à dire*

$$w=w_1+G \quad \textit{où} \quad \frac{\partial w_1}{\partial \bar z}\equiv Aw_1+B\bar w_1. \tag{16}$$

La démonstration est évidente.

Théorème III. *La fonction* $G(z,\bar z)$ *donnee par (15) est une solution particulière de l'équation non-homogène (5).*

La démonstration va d'une vérification immédiate.

Théorème IV. *Si dans l'équation (5)* $F=f_1+f_2+\cdots+f_k$, *c'est à dire si (5) est de la forme*

$$\frac{\partial w}{\partial \bar z}=Aw+B\bar w+\sum_{i=1}^{k} f_i(z,\bar z)$$

et si $G_{f_1}, G_{f_2}, \ldots, G_{f_k}$ *sont les intégrales particulières des équations plus simples*

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial w}{\partial \bar z}=Aw+B\bar w+f_1\\
\cdots\cdots\cdots\\
\frac{\partial w}{\partial \bar z}=Aw+B\bar w+f_k,
\end{gathered}
$$

alors l'intégrale particulière de l'équation (5) est

$$G_f = G_{f_1} + G_{f_2} + \cdots + G_{f_k}.$$

La démonstration suit si dans (15) on pose $F = \sum_{i=1}^{k} f_i$, si l'on devellope et arrange les intégrales.

THÉORÈME V. *Avec une supstitution linéaire de la fonction*

$$w = \alpha(z,\bar z)v + \beta(z,\bar z) \tag{17}$$

dans l'équation non-homogène de Vécua (5), où v est une nouvelle fonction inconnue, α et β les coèfficients libres, on obtient de nouveau équation non-homogène du type (5)

$$\frac{\partial v}{\partial \bar z} = \left(A - \frac{1}{\alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial \bar z}\right)v + B\frac{\bar\alpha}{\alpha}\bar v + \frac{1}{\alpha}\left[\bar\beta B + F + \beta A - \frac{\partial \beta}{\partial \bar z}\right]. \tag{18}$$

La démonstration est élémentaire.

Les conséquences:

THÉORÈME VI. *On peut élire $\alpha(z,\bar z)$ ainsi que le coèfficient près de $\bar v$ soit une constante ou l'unité, de*

$$B\frac{\bar\alpha}{\alpha} = const = C = ou\ 1.$$

THÉORÈME VII. *On ne peut pas d'une voie élémentaire élire β pour que l'équation non-homogène (5) avec une supstitution (17) passe dans une équation homogène du type (1).*

Car dans ce cas doit être

$$\frac{1}{\alpha}\left[\bar\beta B + F + \beta A - \frac{\partial \beta}{\partial \bar z}\right] = 0$$

ce qui donne $\dfrac{\partial \beta}{\partial \bar z} = A\beta + B\bar\beta + F$ ce qui est equivalent à (5).

Par cet élément l'équation de Vécua se differè essentiellement des équation aréolaires ordinaires, qui ne possèdent pas la conjuigaison de la fonction $\bar w$.

THÉORÈME VIII. *Avec une supstitution linéaire de la fonction (17) on ne peut pas éliminer le membre conjuigué $\bar v$.*

Car dans ce cas vaudrait $B\dfrac{\bar\alpha}{\alpha} = 0$, ce qui n'est pas possible au cas général.

Ainsi nous avons eclairé dans cet article quelques questions élémentaires de l'équation Vécua relatives à la non-homogéneité.

LITTERATURE

[**1**] I. N. Vecua, *Obobščennie analitičeskie funkcii*, Monographie, Moskva, "Nauka", 2nd ed., 1988

[**2**] B. Ilievski, *Thèse du Doctorat*, Skopje, Republika Makedoonija, 1993

[**3**] B. Ilievski, *Nekoi analitički rešenija na edna klasa ravenki Vekua*, Matematički Bilten na DMI na Republika Makedonija, **14** (XL), Skopje 1990, 79–86

[**4**] D. Dimitrovski, B. Ilievski, *L'équation différentielle aréolaire analtytique*, Prilozi MANU **V**, 1–2, section sci. math and techn., Skopje 1984, 25–39

(received 21.04.1994.)

Mašinski fakultet, Kraljevo, Jugoslavija

Viša pedagoška škola, Gnjilane, Jugoslavija

Matematički institut, Prirodno-matematički fakultet, Skopje, p.f.162, BJR Makedonija