МАТЕМАТИЧКИ ВЕСНИК
47 (1995), 99–102

UDC 515.126.4
оригинални научни рад
научная работа

О НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧКАХ В МЕТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ НАД ТИХОНОВСКИМ ПОЛУПОЛЕМ

Слободан Ч. Нешич

Резюме. Доказана теорема которая обобщает некоторые теоремы о неподвижных точках функции действующих в метрическом пространстве над тихоновским полуполем.

1. Понятие метрического пространства над полуполем, было введено в работе М. Я. Антоновского, В. Г. Болтянского и Т. А. Сарымсакова [1].

Пусть Δ – произвольное непустое множество. Кольцо всех действительных функций на Δ в тихоновской топологии называется тихиновским полуполем и обозначается через $\mathbf{R}^{\Delta}$. Обозначим через K^{Δ} множество всех строго положительных элементов $f \in \mathbf{R}^{\Delta}$, т.е. таких элементов, что $f(q) > 0$, для всех $q \in \Delta$.

Пусть теперь X – произвольное множество. Отображение $d\colon X \times X \to \overline{K^{\Delta}}$ называется метрикой в X над полуполем $\mathbf{R}^{\Delta}$, если выполнаются обыкновенные аксиомы метрики. Пару (X,d) называется метрическим пространством над $\mathbf{R}^{\Delta}$. Если Δ состоит только из одного элемента, то $\mathbf{R}^{\Delta} \equiv \mathbf{R}$ является полем действительных чисел (см. [2]).

2. Пусть (X,d) – полное метрическое пространство над полем $\mathbf{R}$, а $T\colon X \to X$ отображение. В [3] доказывается, что T имеет единственную неподвижную точку, если удовлетворяются следующие условия

$$d(Tx,Ty) \leqslant k\,d(x,y), \qquad 0 \leqslant k < 1.$$

В статье [4] эти условия были заменены условиями

$$d(Tx,Ty) \leqslant a\,[d(x,Tx) + d(y,Ty)], \qquad 0 \leqslant a < \frac{1}{2},$$

в [5] условиями

$$d(Tx,Ty) \leqslant a\,d(x,Tx) + b\,d(y,Ty) + c\,d(x,y), \qquad a,b,c \geqslant 0, \quad a+b+c < 1,$$

в [6] условиями

$$d(Tx,Ty) \leqslant c\,[d(x,Ty)+d(y,Tx)], \qquad 0 \leqslant c < \frac{1}{2},$$

в [7] условиями

$$d(Tx,Ty) \leqslant q\,d(x,y) + r\,d(x,Tx) + s\,d(y,Ty) + t\,[d(x,Ty)+d(y,Tx)],$$
$$q,r,s,t \geqslant 0, \quad q+r+s+2t<1,$$

в [8] условиями

$$d(Tx,Ty) \leqslant a\,d(x,Tx) + b\,d(y,Ty) + c\,d(x,y) + e\,d(y,Tx) + f\,d(x,Ty),$$
$$a,b,c,e,f \geqslant 0, \quad a+b+c+e+f<1,$$

в [9] условиями

$$d(Tx,Ty) \leqslant a\,d(x,y) + b\,[d(x,Tx)+d(y,Ty)] + c\,[d(x,Ty)+d(y,Tx)],$$
$$0 \leqslant \frac{a+b+c}{1-b-c} < 1, \quad b+c, a+2c<1, \quad c \geqslant 0,$$

в [10] условиями

$$\alpha\,d(x,y) + \beta\,d(Tx,Ty) + \gamma\,[d(x,Tx)+d(y,Ty)] + \delta\,[d(x,Ty)+d(y,Tx)] \geqslant 0,$$
$$\alpha+\beta+2\gamma < \min\{0,-2\delta\}, \quad \beta+\gamma+\delta<0, \quad \alpha+\beta+2\delta<0.$$

3. Следующая теорема является усилением приведенных выше теорем о неподвижной точке.

Теорема 1. *Пусть (X,d) – секвенциально полное метрическое пространство над полуполем $\mathbf{R}^{\Delta}$, а $T\colon X\to X$ отображение, удовлетворяющее условиями*

$$q\,d(Tx,Ty) + r[d^2(x,Tx)+b^2d(x,Ty)d(y,Tx)]^{\frac{1}{2}} + r[d^2(y,Ty)+b^2d(x,Ty)d(y,Tx)]^{\frac{1}{2}} \leqslant s\,[d(x,Ty)+d(y,Tx)] + t\,d(x,y) \tag{1}$$

для любых x, y из X и фиксированных чисел b, q, r, s, t,

$$r \leqslant s+t, \quad t+s+|s| < q+2r, \quad b \geqslant 0. \tag{2}$$

Тогда T имеет неподвижную точку u. Эсли

$$2s+t < q+2br, \tag{3}$$

эта неподвижная точка единственна.

Доказательство. Пусть x_0 из X произвольная точка. Образуем теперь следующую последовательность $\{x_n\}_{n=0}^{+\infty}$, положив

$$x_n = Tx_{n-1} = T^n x_0 \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Подставив в (1) x_{n-1} вместо x и x_n вместо y, получим

$$q\, d(x_n, x_{n+1}) + r[d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_{n+1})] \leqslant s\, d(x_{n-1}, x_{n+1}) + t\, d(x_{n-1}, x_n).$$

Тогда, если воспользуемся аксиомой треугольника для метрики d, имеем

$$q\, d(x_n, x_{n+1}) + r[d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_{n+1})] \\ \leqslant s\, d(x_{n-1}, x_n) + |s|\, d(x_n, x_{n+1}) + t\, d(x_{n-1}, x_n)$$

или

$$q\, d(x_n, x_{n+1}) + r[d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_{n+1})] \\ \leqslant |s|\, d(x_{n-1}, x_n) + s\, d(x_n, x_{n+1}) + t\, d(x_{n-1}, x_n)$$

и поэтому

$$(q + r - |s|)d(x_n, x_{n+1}) \leqslant (s + t - r)d(x_{n-1}, x_n) \tag{4}$$

или

$$(q + r - s)d(x_n, x_{n+1}) \leqslant (|s| + t - r)d(x_{n-1}, x_n). \tag{5}$$

В силу (2) имеем

$$0 \leqslant s + t - r < q + r - |s| \quad \text{и} \quad 0 \leqslant |s| + t - r < q + r - s,$$

откуда

$$0 \leqslant \frac{s + t - r}{q + r - |s|} < 1 \quad \text{и} \quad 0 \leqslant \frac{|s| + t - r}{q + r - s} < 1.$$

Положим теперь

$$\max\left\{\frac{s + t - r}{q + r - |s|}, \frac{|s| + t - r}{q + r - s}\right\} = \lambda,$$

таким образом, $0 \leqslant \lambda < 1$. Из (4) и (5) следует, что

$$d(x_n, x_{n+1}) \leqslant \lambda\, d(x_{n-1}, x_n), \tag{6}$$

для всех $n = 1,\ 2,\ \ldots$. Из (6) следует, что для любого x_0 из X последовательность $\{x_n\}_{n=0}^{+\infty}$ является фундаментальной последовательностью в (X, d). В силу секвенциальной полноте пространства (X, d), такая последовательность сходится к некоторой точке u из X.

Подставив в (1) x_n вместо x и u вместо y, получим

$$q\,d(x_{n+1},Tu)+r[d^2(x_n,x_{n+1})+b^2d(x_n,Tu)d(u,x_{n+1})]^{\frac{1}{2}}$$
$$+\,r[d^2(u,Tu)+b^2d(x_n,Tu)d(u,x_{n+1})]^{\frac{1}{2}}\leqslant s\,[d(x_n,Tu)+d(u,x_{n+1})]+t\,d(x_n,u)$$

и в пределе при $n\to+\infty$ имеем $(q+r-s)d(u,Tu)\leqslant 0$ и так как $q+r-s>0$, то $d(u,Tu)=0$, то есть u является неподвижной точкой отображения T.

Пусть теперь $Tu=u$ и $Tv=v$. Неравенство (1) для точек $x=u$, $y=v$, имеет вид $(q+2br-2s-t)d(u,v)\leqslant 0$. Отсюда и в силу (3) имеем $u=v$. Тем самым доказана и единственность неподвижной точки отображения T. Теорема доказана. ■

ЛИТЕРАТУРА

[**1**] М. Я. Антоновский, В. Г. Болтянский и Т. А. Сарымсаков, *Очерк теории топологических полуполей*, УМН, **21** (4) (1966).

[**2**] Z. Mamuzić, *Some remarks on abstract distance in general topology*, ΕΛΕΥΘΕΡΙΑ **2** (1979), 433–446.

[**3**] S. Banach, *Sur les opérations dans les ensembles et leur application aux équations intégrales*, Fund. Math, 1922, 3, 133–181.

[**4**] R. Kannan, *Some results on fixed points*, Calcutta Math. Soc. **60** (1968), 71–76.

[**5**] S. Reich, *Some remarks concerning contracting mappings*, Canad. Math. Bull. **14**, 1 (1971), 121–124.

[**6**] S. K. Chatterjee, *Fixed point theorem*, Comptes Rend. Acad. Bulgare Sc. **25** (1972), 727–730.

[**7**] Lj. Ćirić, *Generalized contractions and fixed point theorems*, Publ. Inst. Math. **12** (1971), 19–26.

[**8**] G. Hardy, T. Rogers, *A generalization of a fixed point theorem of Reich*, Canad. Math. Bull. **16**, 2 (1973), 201– 206.

[**9**] B. Fisher, *Fixed point mappings*, Lincei – Rend. Sc. fis. mat. e nat. **59**, 5 (1975), 404–406.

[**10**] А. А. Иванов, *Неравенства и теоремы о неподвижных точках*, Math. Balkanica **4** (1974), 283–287.

(поступило 12.10.1995.)

Студентска 14, 11000 Београд, Югославия